



Application of Copula Functions in Meteorological Drought Analysis in Qaen Area

Mahdi Amirabadizadeh¹, Mostafa Yaghoobzadeh¹

1- Associate Professor, Department of Water Sciences and Engineering and member of the Drought and Climate Change Research Group, University of Birjand, Birjand, Iran.

*Corresponding Author: mamirabadizadeh@birjand.ac.ir

Keywords:

Bivariate analysis, Intensity and duration, Marginal probability distribution, Precipitation, Qaen synoptic station.

Introduction

Considering that the severity and duration of drought are probabilistic phenomena, it is more appropriate to analyze those using probabilistic theories. The use of classical multivariate functions is the usual method for analyzing such problems. The use of detailed functions provides the possibility of linking the univariate marginal distribution to each other and creates the bivariate distribution function. Detailed functions have been used in various research to evaluate the effects of drought and to model the relationship between intensity and duration of drought, the most important of which have been mentioned in this research. In this research, the main characteristics of meteorological drought, including the severity and duration of drought in Qaen synoptic station, have been investigated using bivariate joint functions.

Materials and Methods

In this research, the rainfall data of the Qaen observation station during the years 1998-2018 was used on a monthly scale. In this research, SPI index and 12-month intervals were used to determine drought, which was determined using observational rainfall data. Therefore, to check the correlation between the severity and duration of meteorological drought in synoptic Qaen station, Tau-Kendall and Spearman-Roe correlation criteria were used, which were calculated in R statistical software. In this research, 21 copula functions were examined to choose the best one. In this research, in order to determine the marginal probability distribution functions, the MLE method was used in the estimation of the detailed dependence parameter.

Results and Discussion

Considering that the severity and duration of drought are the discussed variables in

Received:

14 February 2024

Revised:

11 August 2024

Accepted:

11 August 2024

How to cite this article:

Amirabadizadeh, M., & Yaghoobzadeh, M. (2024). Application of Copula Functions in Meteorological Drought Analysis in Qaen Area. *Journal of Drought and Climate change Research*, 2(3), 1-16. [10.22077/jdcr.2024.7301.1059](https://doi.org/10.22077/jdcr.2024.7301.1059)



this study, therefore, after determining the SPI meteorological drought index values, the run-test was used to determine the severity and duration of drought. The results showed that the drought intensity of 6.66 with a duration of 8 months was the most severe meteorological drought that happened in the period of 1998-2018. The results of the Tau-Kendall and Spearman correlation tests also showed the correlation values between the intensity and duration of drought, respectively, 0.74 and 0.88, which indicates the isotropic effect of these variables. The results of determining the marginal distributions of drought intensity and duration variables showed that Pareto marginal probability function and log normal are the most suitable probability distributions for drought duration and intensity characteristics in Qaen synoptic station, respectively. The values of the parameters of these distributions were $a=0.95$, $b=1.00$ and $\mu=0.39$, $\sigma=1.35$ and $\gamma=0.015$. The results of the analysis of the appropriate joint function showed that the search function showed the best results of goodness of fit based on the AIC index, and the value of this index was determined as -13.74, and the parameter value of the search function Also, 84 times was obtained. Also, the maximum accuracy value was determined as 7.87.

Conflict of Interest

The authors declare that they don't have conflict of interest.



کاربرد توابع مفصل در تحلیل خشکسالی هواشناسی در شهر قائن

مهدی امیرآبادی زاده^{۱*}، مصطفی یعقوب زاده^۱

۱- دانشیار گروه علوم و مهندسی آب و عضو گروه پژوهشی خشکسالی و تغییر اقلیم دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

*نویسنده مسئول: mamirabadizadeh@birjand.ac.ir

واژه‌های کلیدی:

ایستگاه همدیدی قائن، بارش، تحلیل دومتغیره، توزیع حاشیه‌ای احتمال، شدت و مدت خشکسالی.

چکیده

خشکسالی یکی از خسارت‌بارترین وقایع طبیعی هست که به دلیل حکم‌فرما بودن آن در یک حیطه جغرافیایی و طولانی بودن بایستی مورد توجه برنامه‌ریزان منابع آب قرار گیرد. دو مشخصه بارز که در بررسی خشکسالی بایستی مورد توجه باشند، شدت و دوام آن هست. در این تحقیق از توابع مفصل دومتغیره برای ایجاد توزیع‌های دومتغیره از شدت و مدت خشکسالی در ایستگاه هواشناسی قائن طی سال‌های ۲۰۱۸-۱۹۸۸ استفاده شد. برای تعیین شدت و مدت خشکسالی از سری زمانی شاخص بارش استاندارد شده (SPI) ۱۲ ماهه استفاده گردید. ضریب همبستگی تاو-کندال و اسپیرمن برای تعیین معنی‌دار بودن همبستگی بین شدت و مدت خشکسالی مورد استفاده قرار گرفت که مقدار آن‌ها به ترتیب ۰/۷۴ و ۰/۸۸ تعیین گردید. نتایج بررسی توزیع احتمال‌های حاشیه‌ای با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی نشان داد که مدت و شدت خشکسالی به ترتیب از توزیع احتمال پرتو و لوگ نرمال پیروی می‌نمایند که پارامترهای این توزیع‌ها مشخص گردیدند. همچنین از میان توابع مفصل مورد بررسی، تابع مفصل جوئی با داشتن مقدار RMSE برابر ۰/۰۶۷۲ و شاخص NSE برابر ۰/۹۹ مناسب‌ترین تابع برای تحلیل دومتغیره شدت و مدت خشکسالی می‌باشد و مقدار حداکثر لگاریتم درست‌نمایی آن ۷/۸۷ به دست آمد. در نهایت احتمال وقوع دومتغیره توأم و احتمال دوره‌های بازگشت توأم محاسبه شدند که نتایج حاصله می‌تواند اطلاعات ارزشمندی را برای برنامه‌ریزی و مدیریت یکپارچه منابع آب منطقه مورد مطالعه، در اختیار برنامه‌ریزان و ذی‌نفعان قرار دهد.

تاریخ دریافت:

۱۴۰۲/۱۱/۲۵

تاریخ ویرایش:

۱۴۰۳/۰۵/۲۱

تاریخ پذیرش:

۱۴۰۳/۰۵/۲۱

مقدمه

تجربه و شواهد نشان داده است که اثرات ناشی از خشک‌سالی بسیار زیاد است. خشک‌سالی‌ها در گذشته جمعیت زیادی را تحت تأثیر قرار داده است، به‌گونه‌ای که بیش از ۳۵ درصد از افراد آسیب‌دیده از بلایای طبیعی و ۵۰ درصد از مرگ‌ومیر ناشی از بلایای طبیعی را در برمی‌گیرند. همچنین، حدود ۷ درصد از خسارات اقتصادی جهان نیز ناشی از وقوع خشک‌سالی‌هاست (Chen & Guo, 2019). پایش خشک‌سالی از دو منظر زمان شروع تا انتها و میزان شدت آن در برنامه‌ریزی منابع آب اهمیت به‌سزایی دارد. در تقسیم‌بندی‌های خشک‌سالی از خشک‌سالی هواشناسی، هیدرولوژیکی، کشاورزی و اجتماعی-اقتصادی نام‌برده می‌شود که با عنایت به استفاده از داده‌های بارش، ارزیابی صورت گرفته در دسته خشک‌سالی هواشناسی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه شدت و مدت خشک‌سالی پدیده‌های پیچیده و احتمالاتی می‌باشند، لذا تحلیل آن‌ها با استفاده از نظریه‌های احتمالاتی مناسب‌تر است. استفاده از توابع چند متغیره کلاسیک روش معمول در تحلیل مسائل این‌چنینی می‌باشد. اما توزیع حاشیه‌ای متغیرها و یکسان نبودن آن‌ها مشکل جدی را در استفاده از این روش‌ها فراروی محققین قرار می‌دهد. استفاده از توابع مفصل در سال‌های اخیر توانسته است بر این مشکل فائق آید. به‌عبارت‌دیگر توابع مفصل قادر است تا توابع توزیع حاشیه‌ای تک متغیره را به یکدیگر پیوند داده و تابع توزیع دومتغیره را ایجاد نماید. علاوه بر این با استفاده از توابع مفصل می‌توان ساختار همبستگی بین متغیرها را به شکل دقیق‌تری موردبررسی قرارداد (Salvadori et al., 2007). توابع مفصل اولین بار توسط اسکالر (Sklar, 1959) در مباحث احتمالات چند متغیره مطرح شد و در زمینه‌های مختلف اقتصاد، آمار و مباحث منابع آب مورد استفاده قرار گرفته است. اولین بار شیاو (Shiau, 2006) از مفهوم توابع مفصل در تحلیل توأم شدت و مدت خشک‌سالی در تایوان استفاده نمود. از توابع مفصل در پژوهش‌های مختلفی برای ارزیابی اثرات خشک‌سالی و مدل‌سازی رابطه شدت و مدت خشکی استفاده شده که از آن جمله می‌توان به مطالعات ون و همکاران (Won et al. 2020)،

داس و همکاران (Das et al. 2020)، بذرافشان و همکاران (Bazrafshan et al. 2020)، مصباح زاده و همکاران (Mes-Sajeev et al. 2020) (bahzadeh et al. 2020) (و ساجو و همکاران (Sajeev et al. 2021) اشاره نمود. میر عباسی و همکاران (Mirabasi et al. 2012) تحلیل توأم شدت-مدت خشک‌سالی را با استفاده از هفت تابع مفصل را برای ایستگاه شرفخانه موردبررسی قراردادند. نتایج بررسی نشان داد که تابع مفصل گالامبوس بهترین تابع در تحلیل شدت-مدت خشک‌سالی می‌باشد. توسونوگلو و کیسی (Tosunoglu and Kisi, 2016) شدت و مدت خشک‌سالی را در هفت ایستگاه هواشناسی در حوضه چورو در ترکیه را با استفاده از توابع مفصل ارشمیدسی مورد تحلیل قراردادند. نتایج این تحقیق نشان داد که توابع مفصل گامبل-هوگارد مناسب‌ترین تابع مفصل برای تحلیل توأم مدت و بزرگی خشک‌سالی در این حوضه می‌باشد. در تحقیق دیگری توسط متولی باشی نائینی (MotevaliBashi, 2017) مشخصه‌های خشک‌سالی تحت اثر تغییر اقلیم در حوضه آبریز زاینده‌رود موردبررسی قرار گرفت. در این تحقیق از شاخص خشک‌سالی SPI و توابع مفصل استفاده گردید و مشخصه‌های شدت-مدت و بیشترین مقدار خشک‌سالی از دیدگاه احتمالات توأم تعیین گردید.

مددگر و همکاران (Madadgar and Moradkhani, 2013) برای تجزیه و تحلیل متغیرهای اصلی خشک‌سالی، از جمله مدت، سختی و شدت، در حوضه رودخانه کلامات بالایی اورگان از کاپولای سه متغیره استفاده کردند. نتایج بررسی همبستگی نشان داد که سختی با مدت زمان خشکی همبستگی قوی‌تری را نسبت به شدت-طول مدت خشکی نشان می‌دهد. در مقایسه با رویدادهای تاریخی، کاهش کلی در مدت و شدت خشک‌سالی برای این منطقه مورد مطالعه در دوره زمانی ۲۰۹۰-۲۰۲۰ با حداکثر مدت خشک‌سالی از ۸ به ۵ ماه برآورد شده است. نتایج نشان داد که مدل‌های بزرگ‌مقیاس GFDL-CM2.1 و CSIRO-MK3.0 به ترتیب مرطوب‌ترین و خشک‌ترین پیش‌بینی‌ها را در بین پنج مدل ارائه می‌نمایند. موسوی ندوشنی و همکاران (Mousavi Nadoushani et al., 2017) در تحقیقی از توابع مفصل برای تحلیل

ضرایب همبستگی اسپیرمن و تاو-کندال بررسی گردید. نتایج همبستگی نشان داد که به‌جز در مقیاس یک‌ماهه، در سایر مقیاس‌های زمانی همبستگی معناداری بین مشخصه‌های خشک‌سالی وجود دارد. نتایج انتخاب توابع مفصل نشان داد که در ایستگاه اراک برای هر دو دوره آماری ۱۰۰ و ۳۷ ساله به ترتیب مفصل کلایتون و گامبل-هوگارد به دلیل دارا بودن بیشترین مقدار NS و کمترین مقدار NRMSE بهترین عملکرد را داشته و برای ایجاد توزیع‌های دومتغیره شدت و مدت خشک‌سالی انتخاب شدند. همچنین نتایج حاکی از آن بود که دوره آماری ۳۷ ساله برای بررسی خشک‌سالی‌ها با شرط "یا" مناسب بوده اما در حالت "و" و تشدید خشک‌سالی‌ها، دوره بازگشت توأم نزدیک به ۴۵ سال می‌رسد.

مراد زاده رحمت‌آبادی و همکاران (Moradzadeh Rah-*matabadi et al.*, 2022) به تحلیل فراوانی دومتغیره مشخصه‌های بارندگی در حوضه خانمیرزا با استفاده از توابع مفصل پرداختند. بدین‌منظور خصوصیات از بارندگی نظیر شدت، مدت و عمق که منجر به سیل می‌شوند از داده‌های بارندگی موجود استخراج گردید و پس از آن توابع توزیع حاشیه‌ای رایج در هیدرولوژی بر این مشخصه‌ها برآزش داده شد. نتایج حاصل از تحلیل نشان داد که تابع توزیع مقادیر حدی (GEV) بر مشخصه‌های بارندگی (شدت، مدت، عمق) به عنوان تابع توزیع برتر شناخته شد و نتایج حاصل از آزمون نکویی برآزش نشان داد که تابع مفصل جوئی به عنوان تابع مفصل برتر بر مشخصه‌های (شدت و مدت) و (شدت و عمق) مناسب می‌باشد. نتایج احتمال توأم و شرطی نیز نشان داد که در زمانی که بارندگی‌های سیل ۸ ساعت باشد برای سطح احتمال ۰/۲ میزان بارندگی ۴۵ میلی‌متر خواهد بود.

تحلیل احتمالاتی خصوصیات خشک‌سالی در ایستگاه مهرآباد تهران، بر مبنای شاخص‌های SPI و خشک‌سالی مؤثر (EDI) توسط فرخ‌نیا و مرید (Farrokhnia and Morid, 2008) صورت گرفت. در این تحقیق توزیع حاشیه‌ای مدت و شدت خشک‌سالی را و توزیع حاشیه‌ای شدت به‌ترتیب نمایی و گاما در نظر گرفته شدند. مناسب‌ترین تابع کاپولا بر اساس بیشترین مقدار

فراوانی دومتغیره خشک‌سالی در حوضه آبریز قره‌سو - گرگان رود استفاده نمودند. در این تحقیق دو متغیر شدت و تداوم خشک‌سالی بر اساس شاخص‌های خشک‌سالی هواشناسی و هیدرولوژیک در ۲۳ زیرحوضه مورد مطالعه و تحلیل فراوانی قرار گرفتند. آن‌ها کارآمدی توابع مفصل مختلف در هر یک از زیرحوضه‌های مورد مطالعه را بررسی کردند و دوره‌های بازگشت متناظر با مقادیر شدت و تداوم متوسط خشک‌سالی را در هر زیرحوضه محاسبه نمودند. بررسی همبستگی نشان داد که همبستگی بالایی بین آماره‌های میانگین دو متغیر شدت خشک‌سالی و تداوم خشک‌سالی هواشناسی مشاهده می‌شود. اما در مورد همبستگی میان متغیرهای شدت و تداوم خشک‌سالی هیدرولوژیک، ضریب همبستگی بسیار پایین‌تر از مقدار متناظر بین متغیرهای شدت و تداوم خشک‌سالی هواشناسی مشاهده شد. همچنین نتایج نشان داد که بالاترین میزان کارایی برای اجرای تحلیل فراوانی رویدادهای خشک‌سالی هواشناسی و هیدرولوژیک در ناحیه مورد مطالعه مربوط به تابع مفصل گامبل - هوگارد می‌باشد.

خشک‌سالی‌های منطقه‌ی شمال غرب ایران توسط میر عباسی و همکاران (Mirabbasi et al., 2013) با استفاده از توابع مفصل و شاخص JDI بررسی شدند و یک روش جدید برای پیش‌بینی شرایط رطوبتی در ماه‌های آینده بر اساس سطح آستانه‌ی احتمالی بهینه توسعه دادند. نتایج این پژوهش حاکی از این است که روش پیشنهادی می‌تواند شرایط رطوبتی ۱ و ۳ ماه آینده را با دقت زیادی پیش‌بینی کند.

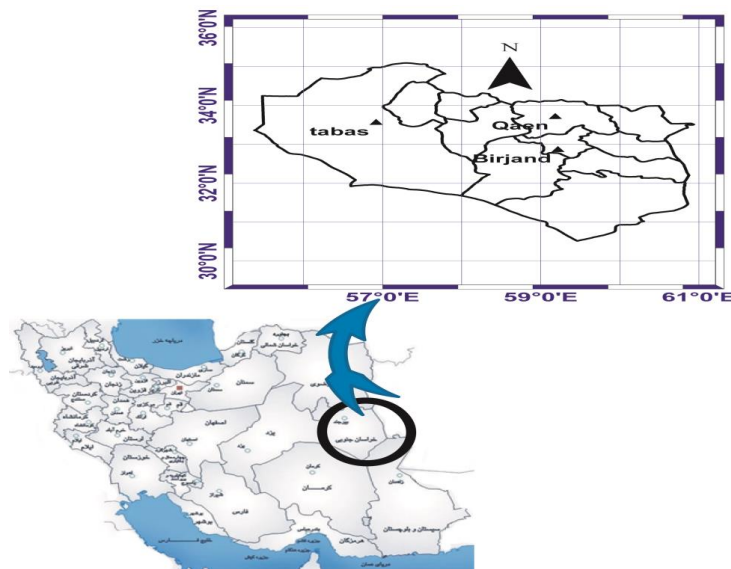
در تحقیقی دیگر، نادری و همکاران (Naderi et al., 2021) به تحلیل چند متغیره خشک‌سالی در ایستگاه سینوپتیک اراک با استفاده از شاخص SPEI و توابع مفصل و اثر طول دوره آماری بر احتمال وقوع خشک‌سالی پرداختند. در این تحقیق از داده‌های بارش و دمای مشاهداتی و شبکه‌ای پایگاه اقلیمی جهانی در دو دوره آماری ۱۰۰ و ۳۷ ساله استفاده شد. سپس خصوصیات مدت و شدت خشک‌سالی در مقیاس‌های زمانی مختلف (۱، ۳، ۶، ۹ و ۱۲-ماهه) استخراج و ساختار وابستگی موجود بین مشخصه‌ها با استفاده از

منطقه مورد مطالعه

در این تحقیق داده‌های بارش ایستگاه همدیدی قائن طی سال‌های ۱۹۹۸-۲۰۱۸ در مقیاس ماهانه مورد استفاده قرار گرفت. این ایستگاه در طول جغرافیایی $33^{\circ} 43'$ شمالی و $59^{\circ} 10'$ شرقی و عرض جغرافیایی 1432 متر بالاتر از سطح دریای آزاد قرار دارد. داده‌های مورد استفاده از نظر وجود داده گمشده و پرت مورد بررسی و تکمیل قرار گرفتند. همچنین آمار اولیه در مقیاس روزانه بودند که داده‌های ماهانه با لحاظ مجموع بارش و میانگین دما از آن استخراج گردید. نمودار تغییرات بارش روزانه در مقیاس ماهانه طی سال‌های ۱۹۹۸-۲۰۱۸ در ایستگاه سینوپتیک قائن در شکل (۲) نشان داده شده است.

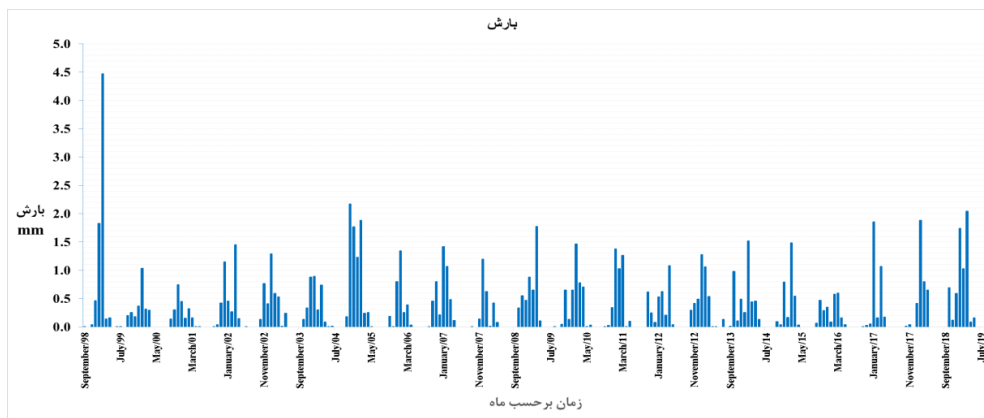
تابع حداکثر درست‌نمایی را انتخاب گردید. بر این اساس مناسب‌ترین تابع کاپولا برای شاخص‌های EDI و SPI به ترتیب جوئی و فرانک انتخاب شدند. در این تحقیق به بررسی ویژگی‌های اصلی خشک‌سالی هواشناسی شامل شدت و مدت خشک‌سالی در ایستگاه همدیدی قائن با استفاده از توابع مفصل دومتغیره پرداخته شده است. در این تحقیق از ۲۱ تابع مفصل برای انتخاب تابع مفصل مناسب استفاده شده است که روابط و جزئیات آنها در جدول ۲ آورده شده است. با انتخاب تابع مفصل مناسب می‌توان احتمال وقوع خشک‌سالی‌های با شدت و تداوم مشخص را تعیین نمود که در مدیریت منابع آب گامی اساسی و مهم می‌باشد.

مواد و روش‌ها



شکل ۱. موقعیت ایستگاه هواشناسی قائن در استان خراسان جنوبی

Fig. 1. The Location of Qaen's meteorological station in South Khorasan Province



شکل ۲. تغییرات میانگین بارش روزانه طی ماه‌های مورد مطالعه در ایستگاه قائن طی سال‌های ۱۹۹۸-۲۰۱۸

Fig. 2. Mean daily rainfall changes during the studied months in Qaen's station during 1998-2018

است. در مقیاس‌های زمانی کوتاه‌تر، مقادیر SPI با فرکانس بالا (دوره‌های کوتاه‌تر) می‌توانند دوره‌های خشک‌سالی مهم‌تر را پنهان کنند (Vicente-Serrano & Lopez-Moreno, 2005).

پس از تعیین مقدار این شاخص، بر اساس جدول (۱) وضعیت منطقه موردبررسی، از نظر وضعیت خشک‌سالی مشخص می‌گردد. همان‌گونه که در جدول ۱ مشخص است و بر اساس تعریف، پدیده خشک‌سالی در یک منطقه زمانی به وقوع می‌پیوندد که مقدار شاخص SPI از صفر کوچک‌تر باشد (Loukas & Vasiliades, 2004).

جدول ۱. تقسیم‌بندی وضعیت خشک‌سالی بر اساس شاخص SPI

Table 1. Classification of drought condition based on SPI index

SPI	وضعیت خشک‌سالی
بین صفر و ۰/۹۹-	ملایم
بین ۱- و ۱/۴۹-	متوسط
بین ۱/۵- و ۱/۹۹-	شدید
کمتر از ۲-	خیلی شدید

استفاده از یک متغیر، توصیف کامل‌تری را از وضعیت خشک‌سالی در منطقه ارائه می‌دهد.

بررسی همبستگی متغیرها

از نقاط قوت تحلیل با استفاده از توابع مفصل این است که این توابع نیاز به استقلال متغیرها ندارند و همبستگی بین متغیرهای موردبررسی، امکان تحلیل با استفاده از توابع مفصل را فراهم می‌سازد. از طرفی معیارهایی مانند ضریب همبستگی پیرسون تنها همبستگی خطی را لحاظ می‌نماید و نمی‌تواند به‌عنوان معیار مناسب برای توزیع‌های دومتغیره حدی مورداستفاده قرار گیرد (جوئی، ۱۹۹۷). برای غلبه بر عیوب روش همبستگی پیرسون، برخی روش‌های ناپارامتریک مانند τ کندال و همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن توسط محققین مورداستفاده قرار گرفته است (جوئی، ۱۹۹۷). بنابراین برای بررسی همبستگی بین شدت و مدت خشک‌سالی هواشناسی در ایستگاه همدیدی قائن از معیار همبستگی تاو-کندال و اسپیرمن-رو استفاده گردید که در نرم‌افزار آماری R محاسبه گردیدند. محدوده ضریب τ کندال و

شاخص‌های مختلفی برای شناسایی و پایش خشک‌سالی معرفی شده‌اند که دو شاخص شدت خشک‌سالی پالمر (PDSI) و شاخص بارش استاندارد شده (SPI) شاخص‌هایی هستند که بیشتر برای توصیف خشک‌سالی مورداستفاده قرار می‌گیرند (Mishra and Singh, 2009). در این تحقیق برای تعیین خشک‌سالی از شاخص SPI و بازه‌های زمانی ۱۲ ماهه استفاده گردید که با استفاده از داده‌های بارش مشاهده‌ای تعیین گردید. به‌طور کلی، تحلیل مقیاس‌های زمانی شاخص بارش استاندارد (SPI) بیشتر از ۶ ماه، برای تفکیک خشک‌سالی‌های اصلی دارای اهمیت

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های این شاخص تعیین زمان شروع و خاتمه خشک‌سالی و در نتیجه مدت حاکم بودن پدیده در منطقه می‌باشد. همچنین شدت خشک‌سالی نیز با جمع مقادیر SPI در بازه مورد نظر تعیین می‌گردد و از طرفی کوچک‌ترین مقدار SPI حداکثر شدت در زمان مشخص را نشان می‌دهد.

مدت خشک‌سالی بیانگر مدت زمانی است که شاخص خشکی مورداستفاده به‌صورت پیوسته کمتر از صفر بوده است. از طرف دیگر با استفاده از رابطه زیر می‌توان شدت خشکی را در یک محل تعیین نمود:

$$S = - \sum_{i=1}^D SPI_i \quad (1)$$

که در آن D بیانگر مدت خشک‌سالی و S شدت خشک‌سالی در بازه حکم‌فرما بودن خشکی را نشان می‌دهد. با توجه به وجود همبستگی بین مشخصه‌های خشک‌سالی، از تحلیل دومتغیره برای لحاظ نمودن اثر هر دو مشخصه خشک‌سالی استفاده شد که در مقایسه با بررسی خشک‌سالی تنها با

توزیع‌های توأم متغیر X به صورت زیر بیان می‌شود:
 $[H(x_1, \dots, x_n)] = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n]$ (۲)

و تابع مفصل دومتغیره با استفاده از معادله زیر تعریف می‌شود:

$$(F_{xy}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (۳)$$

که در این رابطه، x و y متغیرهای تصادفی پیوسته، F_{xy} تابع توزیع دومتغیره و F_X و F_Y توابع حاشیه‌ای هستند. بنابراین تابع مفصل دومتغیره برای شدت و مدت خشکسالی به‌قرار زیر خواهد بود:

$$((C(u, v) = F_{DS}(d, s) = C(F_D(d), F_S(s)) \quad (۴)$$

که در این معادله s و d به ترتیب شدت و مدت خشکسالی و F_D و F_S توابع توزیع حاشیه‌ای مدت و شدت خشکسالی می‌باشند. مشخصات توابع مفصلی که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته‌اند در جدول (۲) نشان داده شده است.

اسپیرمن-رو در بازه $[-1, 1]$ است که ۱ همگامی کامل، ۰ ناهمگامی کامل و صفر بدون همگامی را بیان می‌نماید.

تابع مفصل

تابع مفصل تابعی است که برای برقراری ارتباط بین دو یا چند متغیر با توزیع‌های حاشیه‌ای متفاوت و یک بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. توابع مفصل عموماً قادر به ترکیب انواع توابع توزیع احتمال حاشیه‌ای متفاوت می‌باشند چراکه برای ساخت توزیع احتمال چند متغیره، توزیع‌های حاشیه‌ای می‌توانند به صورت مجزا انتخاب گردند. پایه‌گذاری این توابع بر اساس تئوری اسکالر می‌باشد که در ادامه توصیف می‌گردد (Omid et al., 2007):

هرگاه X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی پیوسته n بعدی با توزیع‌های حاشیه‌ای $(F(x_i) = P_x(X_i \leq x_i))$ باشد،

جدول ۲. مشخصات توابع مفصل مورد بررسی در این تحقیق (Sadeh et al., 2017)

Table 2. Specifications of copula functions studied in this research (Sadeh et al., 2017)

RMSE	رابطه ریاضی	تابع مفصل
0.155	$\int_{-\infty}^{\theta^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\theta^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} e^{\left(\frac{2\theta xy - x^2 - y^2}{2(1-\theta^2)}\right)} dx dy$	گوسین
0.144	$\int_{-\infty}^{t_{\theta_2}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\theta_2}^{-1}(v)} \frac{\Gamma\left(\frac{\theta_2+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\pi\theta_2\sqrt{1-\theta_1^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\theta_1 xy + y^2}{\theta_2}\right)^{\frac{\theta_2+2}{2}} dx dy$	تی-استیودنت
0.3	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}}$	کلایتون
0.13	$\frac{-1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	فرانک
0.121	$e^{-[(-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta]^{\frac{-1}{\theta}}}$	گامبل-هوگارد
0.443	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	علی-میخائیل-حق
0.0902	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^\theta$	جوئی
0.521	$uv[1 + \theta(1-u)(1-v)]$	FGM ¹
0.121	$uve^{-\theta \ln u \ln v}$	گامبل-بارنت
0.139	$\frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}$	پلاکت

1. Farlie-Gumbel-Morgenstern

0.117	$[\min(u, v)]^\theta (uv)^{(1-\theta)}$	کوادرانس- اگی ^۱
0.149	$\begin{cases} u - \frac{1-\theta}{1+\theta} u^{\frac{1}{1-\theta}} \left(v^{\frac{-\theta}{1-\theta}} - v^{\frac{1}{1-\theta}} \right), & \text{if } u \leq v \\ v - \frac{1-\theta}{1+\theta} v^{\frac{1}{1-\theta}} \left(u^{\frac{-\theta}{1-\theta}} - u^{\frac{1}{1-\theta}} \right), & \text{if } v \leq u \end{cases}$	رافتری
0.123	$\begin{cases} (1-\theta)uv + \theta \min(u, v), & \text{if } \theta \in (0, \infty) \\ (1+\theta)uv + \theta(u+v-1)\Psi(u+v-1) \end{cases}$	شبه- لوئیس
0.704	$uv[1 + \theta(u-1)(v-1)(2u-1)(2v-1)]$	مکعبی
0.0928	$u + v - 1 + [(1-u)^{\frac{-1}{\theta}} + (1-v)^{\frac{-1}{\theta}} - 1]^{-\theta}$	بور
0.107	$uv e^{[-\ln u]^{-\theta} + [-\ln v]^{-\theta}]^{\frac{-1}{\theta}}}$	گلامبوس
0.194	$\min [u^{(1-\theta_1)} v, uv^{(1-\theta_2)}]$	مارشال- الکین
0.521	$\{\theta_1 [\min(u, v)]^{\theta_2} + (1-\theta_1) [uv]^{\theta_2}\}^{\frac{1}{\theta_2}}$	فیشر- هینزمن
0.1	$e^{1 - [((1-\ln(u))^{\theta_1-1})^{\theta_2} + ((1-\ln(v))^{\theta_2})^{\frac{1}{\theta_2+1}}]^{\frac{1}{\theta_1}}}$	روچ-الگر
0.521	$uv[1 + \theta_2 \left(1 - u^{\frac{1}{\theta_1}}\right) \left(1 - v^{\frac{1}{\theta_1}}\right)]^{\theta_1}$	فیشر- کوک
0.107	$\{1 + [(u^{-\theta_1} - 1)^{\theta_2} + (v^{-\theta_1} - 1)^{\theta_2}]^{\frac{1}{\theta_2}}\}^{\frac{-1}{\theta_1}}$	BB1
0.107	$e^{-[(-\ln(u))^{\theta_1} + (-\ln(v))^{\theta_1} - ((-\ln(u))^{-\theta_1})^{\theta_2} + ((-\ln(v))^{-\theta_1})^{\theta_2}]^{\frac{-1}{\theta_1}}}$	BB5
0.107	$e^{\ln(u^{1-\theta_1}) + \ln(v^{1-\theta_2}) - [(-\theta_1 \ln(u))^{\theta_3} + (-\theta_2 \ln(v))^{\theta_3}]^{\frac{1}{\theta_3}}}$	تان

تحقیق برای ارزیابی نکویی برآزش توابع مفصل اشاره شده، از شاخص معیار آکائیک (AIC) استفاده گردید که در ادامه آمده است (ژانگ و سینگ، ۲۰۰۶):
که در آن k تعداد پارامتر و Ln ML تابع لگاریتم حداکثر درست نمایی می‌باشد.

$$AIC = -2\ln ML + 2k \quad (۶)$$

نتایج و بحث

در این بخش نتایج تحلیل شدت و مدت خشک‌سالی در ایستگاه سینوپتیک قائن با استفاده از توابع مفصل ارائه می‌شود. در اولین گام پس از کنترل کیفی داده‌ها، لازم است تا شاخص SPI با استفاده از داده‌های بارش مشاهداتی ماهانه ایستگاه تعیین گردد که نمودار آن در شکل (۳) نشان داده شده است. با توجه به اینکه شدت و مدت خشک‌سالی، متغیرهای مورد بحث در این مطالعه می‌باشند، لذا این دو پارامتر با استفاده از روابط و خروجی SPI مرحله قبل تعیین گردید.

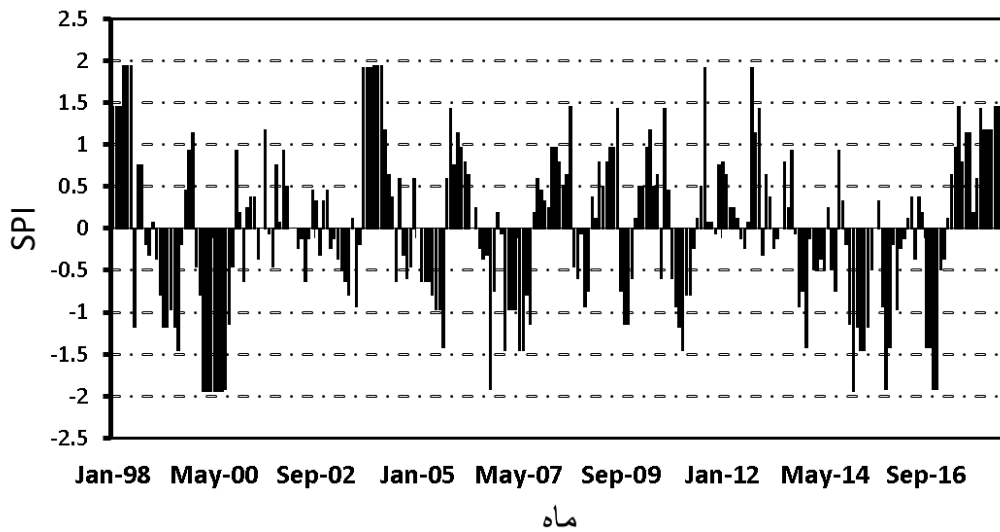
برآورد پارامترها و آزمون نکویی برآزش توابع مفصل

در این تحقیق به منظور تعیین توابع توزیع احتمال حاشیه‌ای، از روش تابع استنتاجی برای حاشیه‌ها در تخمین پارامتر وابستگی مفصل استفاده گردید که توسط جوئی^۲ (Joe, 1997) توسعه داده شد. در این روش، ابتدا توزیع حاشیه‌ای داده‌های مشاهداتی مشخص می‌گردد و در گام بعد پارامتر θ تابع مفصل با استفاده از بیشینه‌سازی تابع درست نمایی تعیین می‌گردد. از رابطه زیر تابع لگاریتم درست نمایی قابل برآورد می‌باشد (Salvadori et al., 2007):

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^n \log(c(u, v)) = \sum_{k=1}^n \log[c(F_D(d), F_S(s))] \quad (۵)$$

که در آن n تعداد داده‌ها، $F_D(d)$ و $F_S(s)$ به ترتیب توابع توزیع حاشیه‌ای متغیرهای مدت (d) و شدت (s) خشک‌سالی و c تابع چگالی مفصل می‌باشد. در این

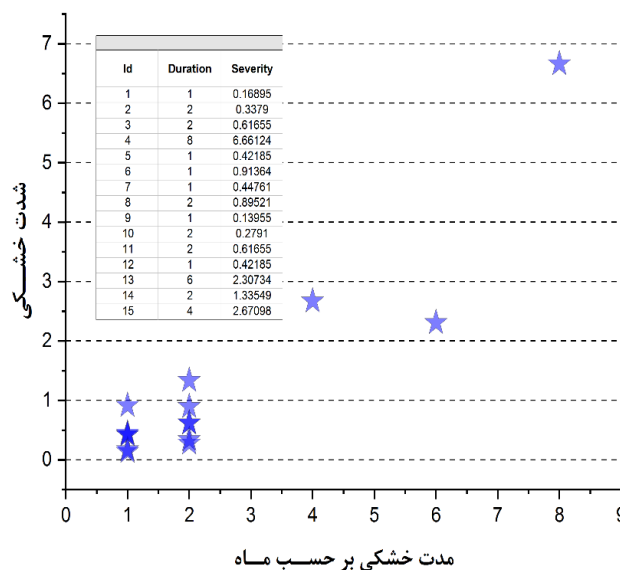
1. Cuadras-Auge
2. Joe



شکل ۳. نمودار تغییرات شاخص SPI در مقیاس ماهانه در ایستگاه سینوپتیک قائن
 Fig. 3. Changes of SPI index in monthly time scale in Qaen's synoptic station

پارامترها در قالب جدول ضمیمه شکل (۴) شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود شدت خشک‌سالی ۶/۶۶ با تداوم ۸ ماه شدیدترین خشک‌سالی هواشناسی اتفاق افتاده در بازه زمانی ۱۹۹۸-۲۰۱۸ بوده است.

پس از تعیین مقادیر شاخص خشک‌سالی هواشناسی SPI از آزمون ران-تست با هدف تعیین شدت و مدت خشکی استفاده گردید. نتایج حاصل از این آزمون در شکل (۴) نشان داده شده است. همچنین مقادیر این



شکل ۴. شدت-مدت خشک‌سالی بر اساس شاخص SPI در ایستگاه دیده‌بانی قائن
 Fig 4. Severity-Duration of drought based on SPI index in Qaen's synoptic Station

شدت و مدت خشکی، برآزش تعدادی از توزیع‌ها با استفاده از آزمون آماری کاموگرف-اسمیرنوف در سطح معنی‌داری ۵ درصد انجام گرفت و نتایج نشان داد که تابع احتمال حاشیه‌ای پارتو^۱ و لوگ نرمال^۲ مناسب‌ترین

نتایج آزمون همبستگی تاو-کندال و اسپیرمن نیز مقادیر همبستگی بین شدت و مدت خشک‌سالی را به ترتیب ۰/۷۴ و ۰/۸۸ نشان داد که بیانگر اثر همسان گرد این متغیرها می‌باشد و لذا می‌توان از توابع مفصل برای ساخت مدل دو متغیره استفاده نمود. به‌منظور تعیین توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای

1. Pareto
2. Lognormal

توزیع‌های احتمال، برای به ترتیب ویژگی‌های مدت و شدت خشک‌سالی در ایستگاه سینوپتیک قائن می‌باشند و پارامترهای این توزیع‌ها در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۳. برازش توابع تک متغیره حاشیه‌ای مدت و شدت خشک‌سالی هواشناسی در ایستگاه قائن
Table 3. Fitting marginal univariate functions of duration and intensity of meteorological drought in Qaen's station

P-value	پارامترهای برآورد شده‌ی تابع	بهترین تابع برازش شده	متغیر
0.344	$a=0.95, b=1.00$	پرتو	مدت
0.653	$\mu=0.39, \sigma=1.35, \gamma=0.015$	لوگ نرمال	شدت

دست آمد. همچنین مقدار حداکثر درست‌نمایی نیز ۷/۸۷ تعیین شد. لذا تابع مفصل دو متغیر توأم با این پارامتر قابل توصیف است. سایر شاخص‌های ارزیابی نیز در جدول زیر آورده شده است:

نتایج بررسی تابع مفصل مناسب نشان داد که تابع جوئی بهترین نتایج نکویی برازش AIC را نشان داد که مقدار این شاخص برابر ۱۳/۷۴- تعیین گردید و مقدار پارامتر تابع مفصل جوئی نیز ۴- برابر ۳/۸۴ به

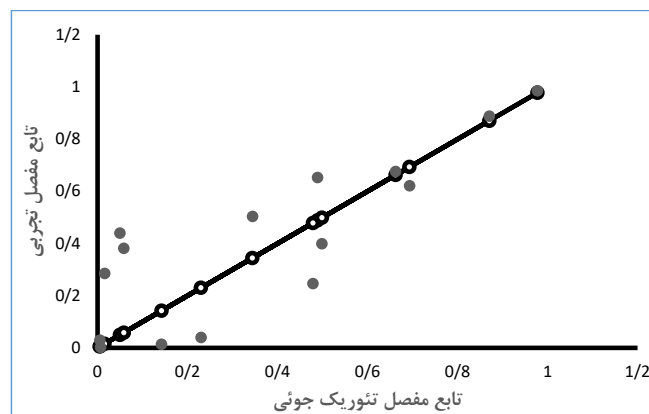
جدول ۴. مقادیر شاخص‌های ارزیابی در انتخاب تابع مفصل مناسب

Table 4. Values of evaluation indices in the selection of the appropriate joint function

P-value	NSE	RMSE	تابع مفصل انتخابی
۰/۲۷	۰/۹۹۶	۰/۰۶۷۲	جوئی

مطلوبی می‌باشند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود شاخص‌های ارزیابی در انتخاب تابع مفصل جوئی، دارای مقادیر عملکردی

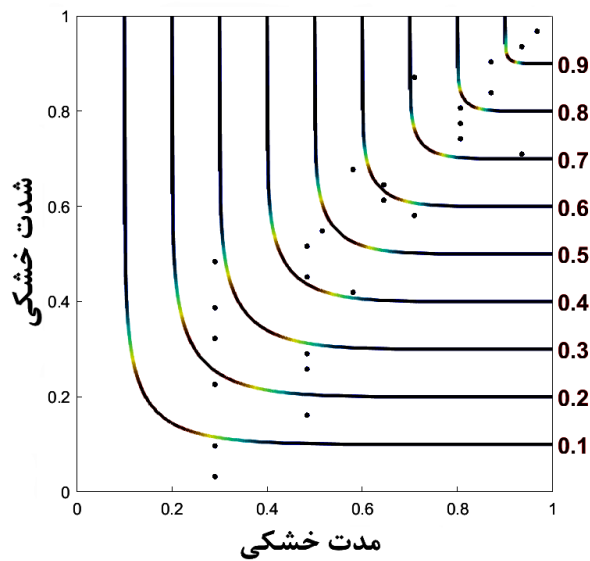


شکل ۵. تابع مفصل تجربی برحسب تابع مفصل جوئی در ایستگاه قائن

Fig 5. The joint experimental function based on the Joe joint function in Qaen's station

برازش زاویه ۴۵ درجه نشان داد که بین مقادیر تجربی و تئوری همخوانی مناسبی برقرار می‌باشد.

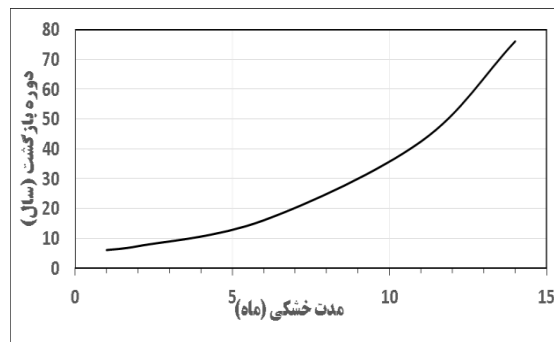
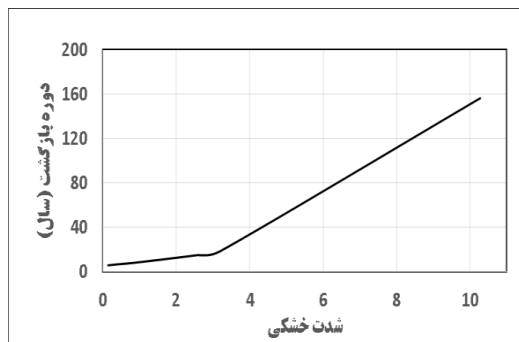
در شکل ۵ مقادیر توابع مفصل تجربی و تابع مفصل جوئی در مقابل یکدیگر رسم شده‌اند. همچنین خط



شکل ۶. منحنی احتمال وقوع شدت- مدت خشک‌سالی تجربی و برازش شده با استفاده از تابع مفصل جوئی در ایستگاه قائن
Fig 6. Empirical probability curve of severity-duration drought event using the Joe joint function in Qaen's station

که در این شکل نشان داده می‌شود این تابع مفصل برازش شده همخوانی مناسبی با مقادیر تجربی دارد. بنابراین این تابع مفصل مناسب می‌باشد.

شکل ۶ منحنی احتمال وقوع شدت- مدت خشک‌سالی تجربی را در برابر مقادیر مستخرج شده از تابع مفصل جوئی را در برابر همدیگر نشان می‌دهد. همان گونه



شکل ۷. منحنی دوره بازگشت شدت و مدت خشک‌سالی هواشناسی برای ایستگاه همدیدی قائن
Fig7. The return period of the intensity - duration meteorological drought curve for Qaen's station

در تحلیل برای طرح‌های کوتاه مدت مبنای محاسبات دوره بازگشت‌های کوچک‌تر و در تحلیل برای دوره‌های بلندمدت مبنای طراحی دوره بازگشت‌های بزرگ‌تر مدنظر است که در این پژوهش هر دو دوره بازگشت بررسی گردید. نتایج حاصل از داده‌های تولیدی حاکی از آن است که حداقل در دوره‌های آتی برای شدت و مدت‌های مشخص احتمال رخ دادن حداقل خشک‌سالی‌هایی دوره مشابه‌های تاریخی وجود خواهد داشت. آگاهی از دوره بازگشت‌های بر اساس داده‌های تاریخی

همان طور که در منحنی‌های دوره بازگشت شکل ۷ مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر شدت و مدت خشک‌سالی دوره بازگشت خشک‌سالی‌ها نیز افزایش می‌یابد، که این موضوع نیز با مبنای تحلیل‌های هیدرولوژیک مطابقت دارد، چرا که از دیدگاه هیدرولوژیک احتمال رخداد وقایع شدید نظیر خشک‌سالی، سیلاب در طول یک بازه زمانی طویل وجود دارد. چرا که عنصر زمان به عنوان مهم‌ترین عامل در تحلیل دوره بازگشت‌ها در مسائل هیدرولوژی و منابع آب می‌باشد،

- characteristics encompassing climate indices over the Himalayan states in India. *Journal of Hydrology*, 580, 124356. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124356>.
- Farrokhnia, A. & Morid, S. (2008). Analysis of drought severity and duration using Copula functions. 4th National Congress on Civil Engineering, 6-8 May [In Persian]
- Joe, H. (1997). Multivariate models and multivariate dependence concepts. CRC press.
- Loukas, A. & Vasilides, L. (2004). Probabilistic analysis of drought spatiotemporal characteristics in Thessaly region, Greece. *Natural Hazards and Earth System Science*, 4, 719-731. <https://doi.org/10.5194/nhess-4-719-2004>.
- Madadgar, S., & Moradkhani, H. (2013). Drought analysis under climate change using copula. *Journal of Hydrologic Engineering*, 18(7), 746-759. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.000053](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.000053).
- Mesbahzadeh, T., Mirakbari, M., Mohseni Saravi, M., Soleimani Sardoo, F., & Miglietta, M. M. (2020). Meteorological drought analysis using copula theory and drought indicators under climate change scenarios (RCP). *Meteorological Applications*, 27(1). <https://doi.org/10.1002/met.1856>.
- Mirabbasi, R., Anagnostou, E., Fakheri-Fard, A., Dinpashoh, Y. & Eslamian, S. (2013). Analysis of meteorological drought in northwest Iran using the Joint Deficit Index. *Journal of Hydrology*, 492, 35-48. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.04.019>.
- Mirabbasi, R., Fakheri-Fard, A. & Dinpashoh, Y. (2012). Bivariate drought frequency analysis using the copula method. *Theoretical and Applied Climatology*, 108(1-2), 191-206. <https://doi.org/10.1007/s00704-011-0524-7>.
- Mishra, A., Singh, V. P. & Desai, V. (2009). Drought می‌تواند اطلاعات مفیدی را در اختیار مهندسان منابع آب، محیط زیست و سایر حوزه‌های مرتبط با علوم آب قرار دهد.
- ### نتیجه‌گیری
- در این تحقیق تحلیل دو مشخصه اصلی خشک‌سالی شامل مدت و شدت خشک‌سالی با استفاده از توابع مفصل دو متغیره در ایستگاه هواشناسی قائن صورت گرفت. شاخص خشک‌سالی بارش استاندارد شده و آزمون ران تست به ترتیب برای تفکیک وقوع خشک‌سالی و نیز شدت-مدت آن‌ها مورداستفاده قرار گرفتند. توزیع‌های حاشیه‌ای متغیرهای شدت و مدت خشکی، آزمون آماری اندرسون-دارلینگ در سطح معنی‌داری ۵ درصد انجام گرفت و نتایج نشان داد که توابع احتمال حاشیه‌ای پرتو و لوگ نرمال مناسب‌ترین توزیع‌های احتمال، برای به ترتیب ویژگی‌های مدت و شدت خشک‌سالی در ایستگاه سینوپتیک قائن می‌باشند.
- همچنین نتایج بررسی تابع مفصل مناسب برای دو مشخصه شدت و مدت خشکی نشان داد که تابع جوئی بهترین نتایج نکویی برازش AIC را دارد و مقدار پارامتر تابع مفصل جوئی نیز برابر ۳/۸۴ به دست آمد. همچنین مقدار حداکثر درست‌نمایی نیز ۷/۸۷ تعیین شد. لذا تابع مفصل دو متغیره توأم با این پارامتر قابل توصیف می‌باشد که با نتایج آمیدی و همکاران (Omidi, et al., 2010) همخوانی دارد. همچنین احتمال توأم وقوع خشک‌سالی با دوره برگشت متناظری در شدت و مدت خشک‌سالی محاسبه گردید.
- ### منابع
- Bazrafshan, O., Zamani, H. & Shekari, M. (2020). A copula-based index for drought analysis in arid and semi-arid regions of Iran. *Natural Resource Modeling*, 33(1), e12237. <https://doi.org/10.1111/nrm.12237>.
- Chen, L., & Guo, S. (2019). Copulas and its application in hydrology and water resources. Springer Singapore.
- Das, J., Jha, S. & Goyal, M. K. (2020). Non-stationery and copula-based approach to assess the drought

- research*), 11(3), 59-75. <https://doi.org/10.30495/wsrcj.2022.19226>. [In Persian].
- Naderi, K., Moghdasi, M., Shukri, A., & Ahmadi, F. (2021). Analyzing the effect of the length of the statistical period on the probability of drought using the detailed functions approach (case study: Arak synoptic station). *Iran Water and Soil Research*, 52(9), 2427-2440. <https://doi.org/10.22059/ijswr.2021.324692.668986>. [In Persian].
- Omidi, M., Mohammadzadeh, M., & Murid, S. (2010). Probabilistic analysis of severity-duration of drought in Tehran province using detailed functions. *Iran Water and Soil Research*, 41(1), 95-101. <https://doi.org/20.1001.1.2008479.1389.41.1.10.9>. [In Persian].
- Sadegh, M., Ragno, E., & AghaKouchak, A. (2017). Multivariate C copula A analysis T toolbox (Mv-CAT): describing dependence and underlying uncertainty using a Bayesian framework. *Water Resources Research*, 53(6), 5166-5183. <https://doi.org/10.1002/2016WR020242>.
- Sajeev, A., Deb Barma, S., Mahesha, A., & Shiau, J. T. (2021). Bivariate drought characterization of two contrasting climatic regions in India using copula. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 147(3). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)IR.1943-4774.0001536](https://doi.org/10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0001536).
- Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N. T., & Rosso, R. (2007). *Extremes in nature: an approach using copulas* (Vol. 56). Springer Science & Business Media.
- Shiau, J.T. (2006). Fitting drought duration and severity with two-dimensional copulas. *Water resources management*, 20(5), 795-815.
- Sklar, M. (1959). Functions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ.Paris*, 8, 229-231.
- characterization: a probabilistic approach. *Stoch Environment Research Risk A*, 23(1), 41-55. <https://doi.org/10.1007/s00477-007-0194-2>.
- Moradzadeh Rahmatabadi, S., Irandoust, M., & Mirabbasi Najafabadi, R. (2022). Bivariate Frequency Analysis of Rainfall Characteristics Using Archimedean Copula Functions (Case Study: Khanmirza Watershed in Chaharmahal and Bakhtiari Province). *Journal of Water and Soil Resources Conservation*, 11(3),59-75.<https://doi.org/10.30495/wsrcj.2022.19226>. [In Persian].
- MotevaliBashi Naeini, E., Akhond Ali, A. M., Radmanesh, F., Sharifi, M., & Abedi Koupaei, J. (2019). Zoning map of drought characteristics under climate change scenario using copula method in the Zayandeh Roud River Catchment. *Irrigation Sciences and Engineering*, 42(1), 145-160. <https://doi.org/10.22055/jise.2017.20611.1485>. [In Persian].
- Mousavi Nadoushani, S.S., Alimohammadi, S., Ahani, A., Behrouz, M., & Mousavi, S. M. (2017). Analysis of the frequency of the bivariate drought in the Qarasu-Gorganrood watershed using detailed functions. *Journal of Water & Soil Protection Research*, 25(4), 75-91. <https://doi.org/10.22069/jwsc.2018.14689.2964>. [In Persian].
- Muntaseri, M., Amir Attai, b. & Rezaei, H. (2016). Copula-Based Regional Drought Analysis and Derivation of Severity-Area-Frequency Curve in Lake Urmia Basin, *Water and soil journal*, 31(4), 1260-1277. <https://doi.org/10.22067/jsw.v31i4.60382>. [In Persian].
- Murad Zadeh Rahmat-Abadi, S., Irandoost, M., & MirAbbasi, R. (2022). Bivariate Frequency Analysis of Rainfall Characteristics Using Archimedean Joint Functions (Case Study: Khanmirza Basin in Chaharmahal and Bakhtiari Province). *Protection of water and soil resources (scientific*

- Tosunoglu, F. & Kisi, O. (2016). Joint modeling of annual maximum drought severity and corresponding duration. *Journal of Hydrology*, 543: 406-422.
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2016.10.018>.
- Vicente-Serrano, S. M., & López-Moreno, J. I. (2005). Hydrological response to different time scales of climatological drought: an evaluation of the Standardized Precipitation Index in a mountainous Mediterranean basin. *Hydrology and earth system sciences*, 9(5), 523-533. <https://doi.org/10.5194/hess-9-523-2005>.
- Won, J., Choi, J., Lee, O., & Kim, S. (2020). Copula-based Joint Drought Index using SPI and EDDI and its application to climate change. *Science of the Total Environment*, 744, 140701. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.140701>.
- Zhang, L., & Singh, VP. (2006) Bivariate flood frequency analysis using the copula method. *J Hydrologic Engineering*, 11(2), 150-164. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2006\)11:2\(150\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2006)11:2(150)).

